C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 1201-1206, 1995

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Équations d'Euler dans une coque sphérique mince

Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu et Geneviève Raugel

Résumé – Dans cette Note, nous considérons les équations d'Euler dans le domaine mince délimité par les sphères de rayons 1 et $1+\varepsilon$. Si la donnée initiale est bornée dans H^3 et ε-proche dans H^2 d'une donnée sur la sphère unité S^2, nous démontrons que la solution classique des équations d'Euler existe sur un intervalle de temps $[0, T(\varepsilon)]$, où $T(\varepsilon) \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$. En outre, sur cet intervalle de temps, nous comparons la solution avec celle d'un système d'équations limites sur S^2.

Euler equations in a thin spherical shell

Abstract – *For the Euler equations in the thin domain bounded by the spheres of radii 1 and $1+\varepsilon$, we show that if the initial datas are bounded in H^3 and ε-close in H^2 to two-dimensional data on the unit sphere S^2, then the classical solution of the Euler equations exists on a time interval $[0, T(\varepsilon)]$, where $T(\varepsilon) \to +\infty$ as $\varepsilon \to 0$. Moreover, on this interval, we compare this solution with that of a system of limiting equations on S^2.*

Abridged English Version – We study the solutions of the Euler equations describing the motion of an incompressible homogeneous inviscid fluid filling the thin domain $Q_\varepsilon = \{(r, \theta, \varphi) | 1 < r < 1+\varepsilon, -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, where $\varepsilon > 0$ is a small constant, with classical homogeneous boundary conditions and, for sake of simplicity, with zero forcing term. If $W = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\varphi e_\varphi$, where $\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}$ is the usual orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ in spherical coordinates, the Euler equations satisfied by W are:

$$
(0.1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} + \dfrac{V_\varphi}{r \sin\theta}\dfrac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \dfrac{V_\theta^2 + V_\varphi^2}{r} = -\dfrac{\partial p}{\partial r} \\
\dfrac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{V_\varphi}{r \sin\theta}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \dfrac{V_r V_\theta}{r} - \dfrac{V_\varphi^2 \cot\theta}{r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \\
\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \dfrac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \dfrac{V_\varphi}{r \sin\theta}\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{V_r V_\varphi}{r} + \dfrac{V_\theta V_\varphi \cot\theta}{r} \\
\quad = -\dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial p}{\partial \varphi}
\end{cases}
$$

$$
(0.2)\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0
$$

$$
(0.3)\quad V_r(1, \theta, \varphi) = V_r(1+\varepsilon, \theta, \varphi) = 0.
$$

If $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$ is the orthonormal basis on the unit sphere S^2 and we write $W = V_r e_r + U^*$, where $U^* := U_\theta^* \hat{e}_\theta + U_\varphi^* \hat{e}_\varphi = (V_\theta/r)\hat{e}_\theta + (V_\varphi/r)\hat{e}_\varphi$ is a vector field on S^2, we obtain the equations (1.1)-(1.3) below. The change of variables $r = 1 + \varepsilon s$, $0 < s < 1$, maps the thin domain Q_ε onto the fixed domain $Q = S^2 \times (0, 1)$ and the vector field W to $w_\varepsilon := v_r (1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + u_{\varepsilon\theta}^* \hat{e}_\theta + u_{\varepsilon\varphi}^* \hat{e}_\varphi = v_r(1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + U_\varepsilon^*$ [*see* (1.11)]. The Euler equations for w_ε are:

$$
(0.4)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial v_r}{\partial s} + U_\varepsilon^*[v_r] - (1+\varepsilon s)\, k(U_\varepsilon^*, U_\varepsilon^*) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial s} \\
\dfrac{\partial U_\varepsilon^*}{\partial t} + v_r \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial U_\varepsilon^*}{\partial s} + \bar{\nabla}_{U_\varepsilon^*} U_\varepsilon^* + \dfrac{2}{1+\varepsilon s} v_r U_\varepsilon^* = -\dfrac{1}{(1+\varepsilon s)^2}\,\mathrm{grad}\, p_\varepsilon
\end{cases}
$$

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

0764-4442/95/03211201 \$ 2.00 © Académie des Sciences

(0.5) $$\frac{1}{(1+\varepsilon s)^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s}((1+\varepsilon s)^2 v_r)+\overline{\operatorname{div}}\, U_\varepsilon^* = 0$$

(0.6) $$v_r(0,\theta,\varphi)=v_r(1,\theta,\varphi)=0,$$

where $U_\varepsilon^*[v_r]$ is the derivative of v_r in the direction of the vector field U_ε^*, $k(U_\varepsilon^*, U_\varepsilon^*) = u_{\varepsilon\theta}^{*2} + u_{\varepsilon\varphi}^{*2}$ is the second fundamental form on S^2, and the operators with overbars (covariant derivative, gradient, and divergence) signify that they are taken on S^2. We shall use the classical Sobolev spaces $H_\varepsilon^m(TQ)$, $0 \leqq m \leqq 3$, for vector fields in $\mathbb{R}^3$, where the subscript ε means that the coefficient of $\partial^j/\partial s^j$, $0 \leqq j \leqq m$, is ε^{-j} [*see* (1.12)].

The main result of this Note, contained in theorem 2, states that for any positive number K_0, there exist positive constants α, β, γ and ε_0 such that, for $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ and for initial data $\|w^0\|_{H_\varepsilon^3(TQ)} \leqq K_0$, there exists a positive time $T(\varepsilon)$ and a unique classical solution $(w_\varepsilon(t), p_\varepsilon(t))$ of (0.4)-(0.6) in $C^0([0, T(\varepsilon)]; H_\varepsilon^3(TQ)\times H_\varepsilon^4(Q))$ with $w_\varepsilon(0)=w^0$, satisfying

$$\|w_\varepsilon\|_{H_\varepsilon^3(TQ)} \leqq \sup(K_0, |\log\varepsilon^\alpha|^\gamma),$$

whenever $0 \leqq t \leqq T(\varepsilon)$. Moreover, $T(\varepsilon)\to+\infty$ as $\varepsilon\to 0$. On this time interval $[0, T(\varepsilon)]$, $w_\varepsilon(t)$ differs from the solution of a system of three limiting equations, with appropriate initial data, by an error of order ε^β [*see* (2.3)]. The first equation in this limiting system is the usual Euler equation on the unit sphere S^2.

The main ingredients of the proof consist in showing a global existence result for the limiting system on S^2 (*see* theorem 1) and of comparing $w_\varepsilon(t)$, as well as its first two derivatives, with respect to s, with the solutions of this limiting system.

---

1. Présentation du problème. – On considère les équations d'Euler avec des conditions limites homogènes et, pour simplifier, avec une force nulle dans le domaine mince $Q_\varepsilon = \{(r,\theta,\varphi) | 1<r<1+\varepsilon, -\pi\leqq\theta\leqq\pi, 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}$. Si $W = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\varphi e_\varphi$, où $\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}$ est la base orthonormale usuelle de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées sphériques, les équations d'Euler satisfaites par W sont données par (0.1)-(0.3). Puisque nous voulons comparer les solutions de (0.1)-(0.3) avec celles d'un système d'équations limites sur S^2, nous décomposons d'abord le champ de vecteurs W en la somme d'une composante radiale $V_r e_r$ et d'un champ de vecteurs U^* sur S^2, paramétré par r, où $U^* := U_\theta^*\hat{e}_\theta + U_\varphi^*\hat{e}_\varphi = (V_\theta/r)\hat{e}_\theta + (V_\varphi/r)\hat{e}_\varphi$ et où $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$ est la base orthonormale sur la sphère unité S^2. Les équations (0.1)-(0.3) s'écrivent alors

(1.1) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + U^*[V_r] - rk(U^*, U^*) = -\frac{\partial p}{\partial r}\\ &\frac{\partial U^*}{\partial t} + V_r\frac{\partial U^*}{\partial r} + \bar{\nabla}_{U^*} U^* + \frac{2}{r}V_r U^* = -\frac{1}{r^2}\,\overline{\operatorname{grad}}\, p\end{aligned}\right.$$

(1.2) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \overline{\operatorname{div}}\, U^* = 0$$

(1.3) $$V_r(1,\theta,\varphi) = V_r(1+\varepsilon,\theta,\varphi) = 0,$$

où $U^*[V_r]$ désigne la dérivée de V_r dans la direction du champ de vecteurs U^*, $k(U^*, U^*) = U_\theta^{*2} + U_\varphi^{*2}$ est la seconde forme fondamentale sur S^2 et où les barres sur les opérateurs signifient que ceux-ci sont considérés sur S^2. Pour $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ on introduit les espaces de Sobolev usuels $H^m(Q_\varepsilon)$ et $H^m(TQ_\varepsilon)$, munis des normes classiques $\|\cdot\|_{m,Q_\varepsilon}$ et $\|\cdot\|_{m,TQ_\varepsilon}$. On peut, par exemple, définir l'espace $H^m(TQ_\varepsilon)$ en utilisant des dérivées covariantes de tenseurs, où Q_ε est muni de la métrique euclidienne induite de $\mathbb{R}^3$. Il est bien connu (*voir* [2], [3], [8] ou [11]) que, si W^0 est donnée dans $H^3(TQ_\varepsilon)$ et est à divergence nulle, il existe une solution classique unique $(W(t), p(t))$ dans $C^0([0, \tau), H^3(TQ_\varepsilon) \times (H^4(Q_\varepsilon)/\mathbb{R}))$ des équations (0.1)-(0.3) [ou (1.1)-(1.3)] avec $W(0) = W^0$, où τ est un nombre positif ne dépendant que de $\|W^0\|_{3,TQ_\varepsilon}$.

Pour trouver les équations limites sur S^2 quand ε tend vers zéro, on pose $r = 1 + \rho$, $0 < \rho < \varepsilon$, et on fait un développement formel de (W, p) en fonction de ρ, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{2}\rho^2 v_2 + \frac{1}{6}\rho^3 v_3 + \ldots \\ U^* &= U_0^* + \rho U_1^* + \frac{1}{2}\rho^2 U_2^* + \frac{1}{6}\rho^3 U_3^* + \ldots \\ p &= p_0 + \rho p_1 + \frac{1}{2}\rho^2 p_2 + \frac{1}{6}\rho^3 p_3 + \ldots \end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

où les termes v_0 et v_1 sont nuls, à cause des conditions limites (1.3). Aux ordres 0, 1 et partiellement à l'ordre 2 du développement (1.4), on trouve les trois systèmes d'équations suivants :

- Ordre 0 :

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial t} + \bar{\nabla}_{U_0^*} U_0^* = -\overline{\mathrm{grad}}\, p_0, \qquad \overline{\mathrm{div}}\, U_0^* = 0, \tag{1.5}$$

$$p_1 = k(U_0^*, U_0^*). \tag{1.6}$$

- Ordre 1 :

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial t} + \bar{\nabla}_{U_0^*} U_1^* + \bar{\nabla}_{U_1^*} U_0^* = -\overline{\mathrm{grad}}\, p_1 + 2\,\overline{\mathrm{grad}}\, p_0, \tag{1.7}$$

$$p_2 = k(U_0^*, U_0^*) + 2k(U_0^*, U_1^*), \tag{1.8}$$

$$v_2 = -\overline{\mathrm{div}}\, U_1^*. \tag{1.9}$$

- Ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2^*}{\partial t} + \bar{\nabla}_{U_0^*} U_2^* + \bar{\nabla}_{U_2^*} U_0^* = & -2\bar{\nabla}_{U_1^*} U_1^* - v_2(2U_0^* + U_1^*), \\ & - 6\,\overline{\mathrm{grad}}\, p_0 + 4\,\overline{\mathrm{grad}}\, p_1 - \overline{\mathrm{grad}}\, p_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Comme ci-dessus, on introduit les espaces de Sobolev usuels $H^m(S^2)$ et $H^m(TS^2)$. Les équations (1.5) sont simplement les équations d'Euler sur S^2, dont l'existence globale (et l'unicité) de solutions classiques est bien connue (*cf.* [7] par exemple). Les équations (1.6)-(1.10) sont des équations linéaires, dont l'existence et l'unicité des solutions, dans des espaces adéquats, sont faciles à démontrer.

THÉORÈME 1. – *Pour tout triplet donné $(U_0^{*0}, U_1^{*0}, U_2^{*0}) \in H^3(TS^2) \times H^2(TS^2) \times H^1(TS^2)$ tel que $\overline{\mathrm{div}}\, U_0^{*0} = 0$, il existe une solution globale unique $(U_0^*(t), p_0(t)) \in$*

$C^0([0, +\infty); H^3(TS^2) \times (H^4(S^2)/\mathbb{R}))$, $(p_1(t), U_1^*(t)) \in C^0([0, +\infty); H^3(S^2) \times H^2(TS^2))$, $(p_2(t), v_2(t), U_2^*(t)) \in C^0([0, +\infty); H^2(S^2) \times H^1(S^2) \times H^1(TS^2))$ *des équations* (1.5), (1.6)-(1.7) *et* (1.8)-(1.10) *respectivement avec* $(U_0^*(0), U_1^*(0), U_2^*(0)) = (U_0^{*0}, U_1^{*0}, U_2^{*0})$.

On obtient aussi des estimations sur ces solutions, qui sont utilisées dans la démonstration du théorème 2.

Pour comparer les équations (1.1)-(1.3) et (1.5)-(1.10), on utilise les méthodes introduites dans [5], [6] (*voir* aussi [10]). D'abord, on fait le changement de variables $r = 1 + \varepsilon s$, $0 < s < 1$, qui envoie le domaine mince Q_ε sur le domaine fixe $Q = S^2 \times (0, 1)$. Un champ de vecteurs $W = V_r e_r + U_\theta^* \hat{e}_\theta + U_\varphi^* \hat{e}_\varphi = V_r e_r + r U_\theta^* e_\theta + r U_\varphi^* e_\varphi$ sur Q_ε est transformé en le champ de vecteurs $w_\varepsilon := v_r (1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + u_{\varepsilon\theta}^* \hat{e}_\theta + u_{\varepsilon\varphi}^* \hat{e}_\varphi = v_r (1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + U_\varepsilon^*$ sur Q (où U_ε^* est un champ de vecteurs sur S^2) au moyen de la formule $w_\varepsilon = J_\varepsilon W$ où

$$(1.11) \qquad \begin{cases} v_r(s, \cdot) = V_r(1 + \varepsilon s, \cdot), \qquad u_{\varepsilon\theta}^*(s, \cdot) = U_\theta^*(1 + \varepsilon s, \cdot), \\ \qquad\qquad u_{\varepsilon\varphi}^*(s, \cdot) = U_\varphi^*(1 + \varepsilon s, \cdot). \end{cases}$$

L'application J_ε envoie l'espace de Sobolev $H^m(TQ_\varepsilon)$ sur l'espace de Sobolev $H^m(TQ)$, défini en utilisant des dérivées covariantes de tenseurs, où Q est muni, par exemple de la métrique euclidienne induite de $\mathbb{R}^3$. On note $H_\varepsilon^m(TQ)$ l'espace de Sobolev $H^m(TQ)$ muni de la norme

$$(1.12) \qquad \|w\|_{m, \varepsilon, TQ} := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|W\|_{m, TQ_\varepsilon}$$

où $w = J_\varepsilon W$. De même, on note $H_\varepsilon^m(Q)$ l'espace de Sobolev $H^m(Q)$ muni de la norme

$$(1.13) \qquad \|f\|_{m, \varepsilon, Q} := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|F\|_{m, Q_\varepsilon}$$

où $f(s, \cdot) = F(1 + \varepsilon s, \cdot)$. Avec les notations ci-dessus, les équations d'Euler satisfaites par $w_\varepsilon = J_\varepsilon W = v_r (1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + u_{\varepsilon\theta}^* \hat{e}_\theta + u_{\varepsilon\varphi}^* \hat{e}_\varphi = v_r (1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + U_\varepsilon^*$ sont données par (0.4)-(0.6). Comme dans [5], on introduit un opérateur de moyenne (partielle) $M_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(Q), L^2(S^2))$ défini par

$$(1.14) \qquad M_\varepsilon f = m_\varepsilon \int_0^1 f(s, \cdot)\,(1 + \varepsilon s)^2\, ds$$

où $m_\varepsilon = (1 + \varepsilon + (\varepsilon^2/3))^{-1}$. Comme dans [5], on démontre l'inégalité de Poincaré

$$(1.15) \qquad \|f - M_\varepsilon f\|_{0, Q} \leqq C \varepsilon \|f\|_{1, \varepsilon, Q}.$$

Soit X un espace de Hilbert. On introduit l'espace de Sobolev $L_{r^2}^2((0, 1), X)$ des (classes de) fonctions $s \mapsto F(s)$ à valeurs dans X, muni de la norme

$$(1.16) \qquad \|F\|_{L_{r^2}^2((0,1), X)} = \left(\int_0^1 \|F(s)\|_X^2 (1 + \varepsilon s)^2\, ds \right)^{1/2}.$$

L'opérateur de moyenne M_ε se prolonge de manière naturelle en un opérateur $M_\varepsilon \in \mathcal{L}(L_{r^2}^2((0, 1), L^2(TS^2)), L^2(TS^2))$. On remarque que si $w_\varepsilon = v_r (1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + U_\varepsilon^*$ est à divergence nulle, c'est-à-dire satisfait à (0.5), alors $\overline{\operatorname{div}}\, M_\varepsilon U_\varepsilon^* = 0$.

2. RÉSULTATS. – Soit $w_\varepsilon^0 = v_r^0 (1/\varepsilon)(\partial/\partial s) + U_\varepsilon^{*0} \in H_\varepsilon^3(TQ)$, à divergence nulle. Soit $(U_0^*, p_0, p_1, U_1^*, p_2, v_2, U_2^*)(t)$ la solution globale des équations (1.5)-(1.10) avec les conditions initiales

$$(U_0^*(0), U_1^*(0), U_2^*(0)) = (M_\varepsilon U_\varepsilon^{*0}, M_\varepsilon (1/\varepsilon)(\partial U_\varepsilon^{*0}/\partial s), M_\varepsilon (1/\varepsilon^2)(\partial^2 U_\varepsilon^{*0}/\partial s^2)).$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette Note.

THÉORÈME 2. – *Soit K_0 une constante positive donnée. Il existe des constantes positives ε_0, α, β, γ avec $\sup(\varepsilon_0, \beta) < 1$ telles que, pour $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$, si*

$$\|w_\varepsilon^0\|_{3,\varepsilon,TQ} \leqq K_0 \tag{2.1}$$

alors il existe un temps $T(\varepsilon) > 0$ et une solution forte unique

$$(w_\varepsilon(t), p_\varepsilon(t)) \in C^0([0, T(\varepsilon)]; H_\varepsilon^3(TQ) \times H_\varepsilon^4(Q))$$

de (0.4)-(0.6) *tels que, pour $0 \leqq t \leqq T(\varepsilon)$*

$$\|w_\varepsilon(t)\|_{3,\varepsilon,TQ} \leqq \sup(K_0, |\log \varepsilon^\alpha|^\gamma), \tag{2.2}$$

$$\|w_\varepsilon(t) - (0, U_0^*(t))\|_{L_{r^2}^2((0,1), H^2(S^2)\times H^2(TS^2))} \leqq C\varepsilon^\beta, \tag{2.3 i}$$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}(t) - (0, U_1^*(t)) \right\|_{L_{r^2}^2((0,1), H^1(S^2)\times H^1(TS^2))} \leqq C\varepsilon^\beta, \tag{2.3 ii}$$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial s^2}(t) - (v_2(t), U_2^*(t)) \right\|_{L_{r^2}^2((0,1), L^2(S^2)\times L^2(TS^2))} \leqq C\varepsilon^\beta, \tag{2.3 iii}$$

où C est une constante positive ne dépendant que de K_0. En outre, on a

$$T(\varepsilon) \to +\infty \quad \textit{quand } \varepsilon \to 0. \tag{2.4}$$

La démonstration du théorème 2 repose sur un argument de contradiction, une inégalité *a priori* déjà contenue dans [1] et [4], sur des techniques utilisées dans [9] et sur la comparaison de $w_\varepsilon(t)$ avec $(U_0^*, U_1^*, U_2^*)(t)$. D'une part, grâce à l'inégalité de Poincaré (1.15), on peut estimer $(I - M_\varepsilon) U_\varepsilon^*(t)$, $(I - M_\varepsilon)(1/\varepsilon)(\partial U_\varepsilon^*/\partial s)(t)$ et $(I - M_\varepsilon)(1/\varepsilon^2)(\partial^2 U_\varepsilon^*/\partial s^2)(t)$. D'autre part, on obtient des estimations de $U_0^* - M_\varepsilon U_\varepsilon^*$, $U_1^* - M_\varepsilon(1/\varepsilon)(\partial U_\varepsilon^*/\partial s)$, et $U_2^* - M_\varepsilon(1/\varepsilon^2)(\partial^2 U_\varepsilon^*/\partial s^2)$, en étudiant les équations sur S^2 satisfaites par ces quantités. Pour obtenir ces estimations, on utilise des techniques semblables à celles de [1], [4] et de [9]. Pour l'estimation des termes v_r, $(1/\varepsilon)(\partial v_r/\partial s)$ et $(1/\varepsilon^2)(\partial^2 v_r/\partial s^2) - v_2$, on utilise aussi, de manière essentielle, la condition de divergence nulle (0.5).

Note remise le 29 août 1995, acceptée le 31 août 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. T. BEALE, T. KATO et A. MAJDA, Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3D Euler equations, *Comm. Math. Phys.*, 94, 1984, p. 61-66.

[2] J. P. BOURGUIGNON et H. BREZIS, Remarks on the Euler equation, *J. Funct. Anal.*, 15, 1974, p. 341-363.

[3] D. G. Ebin et J. E. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Ann. Math.*, 92, 1970, p. 102-163.

[4] A. B. Ferrari, On the blow up of solutions of the 3D Euler equations in a bounded domain, *Comm. Math. Phys.*, 155, 1993, p. 277-294.

[5] J. K. Hale et G. Raugel, Reaction-diffusion equations in thin domains, *J. Math. Pures Appl.*, 71, 1992, p. 33-95.

[6] J. K. Hale et G. Raugel, A damped hyperbolic equation in thin domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 329, 1992, p. 185-219.

[7] T. Kato, On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 25, 1967, p. 188-200.

[8] T. Kato, Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$, *J. Funct. Anal.*, 9, 1972, p. 296-305.

[9] S. Klainerman et A. Madja, Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, *Comm. Pure Appl. Math.*, 34, 1981, p. 481-524.

[10] G. Raugel et G. Sell, Navier-Stokes equations on thin domains. I: Global attractors and global regularity of solutions, *J. Amer. Math. Soc.*, 6, 1993, p. 503-568.

[11] R. Temam, On the Euler equations of incompressible perfect fluids, *J. Funct. Anal.*, 20, 1975, p. 32-43.

J. M. : Control and Dynamical Systems 104-44,
California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA;
T. R. : Department of Mathematics,
University of California, Santa Cruz, CA 95064, USA;
G. R. : Université de Paris-Sud (et CNRS),
Mathématiques, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex, France.