

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Une approche symplectique pour des théorèmes de décomposition en géométrie ou relativité générale.* Note (*) de MM. Judith Meryl Arms, Arthur Eliot Fisher et Jerrold Eldon Marsden, présentée par M. André Lichnerowicz.

Les théorèmes de décomposition des tenseurs symétriques donnés par Ch. Barbance, Deser, Berger-Ebin, York et Moncrief peuvent tous être obtenus à partir d'une construction générale de géométrie symplectique.

1. NOTATIONS ET RÉSULTATS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE. — Pour plus de clarté, nous commençons par le cas C^∞ de dimension finie. Soit (P, Ω) une variété symplectique de 2-forme Ω , G un groupe de Lie opérant sur P par symplectomorphismes, \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et \mathfrak{g}^* son dual. Si $\xi \in \mathfrak{g}$, ξ_P en le champ de vecteurs correspondant sur P . D'après Kostant-Souriau, nous notons $\Psi : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ un C^∞ -moment pour l'action de G : pour tout $v \in T_x P$ et $\xi \in \mathfrak{g}$, on a

$$\langle T_x \Psi \cdot v, \xi \rangle = \Omega_x(\xi_P(x), v),$$

où $T_x P$ est l'espace tangent à P en $x \in P$ et $T_x \Psi$ l'application linéaire tangente à Ψ en x . Ainsi ξ_P est le champ hamiltonien avec l'énergie $x \rightarrow \Psi(x), \xi$. Dans beaucoup de cas Ψ est construit explicitement comme invariant de Noether : par exemple si G agit sur Q et aussi sur T^*Q de manière symplectique, on a

$$\langle \Psi(\alpha_x), \xi \rangle = \langle \alpha_x, \xi_Q(x) \rangle \quad (\alpha_x \in T_x^* Q).$$

Nous supposons Ψ *équivariant*; i. e. pour tout $g \in G$, $\Psi \circ \Phi_g = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ \Psi$, où $\Phi_g : P \rightarrow P$ est l'action donnée et $\text{Ad}_{g^{-1}}^*$ l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* .

Si $\mu \in \mathfrak{g}^*$, soit $G_\mu = \{g \in G \mid \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mu = \mu\}$ le sous-groupe d'isotropie de μ . L'équivariance implique que G_μ laisse invariant chaque ensemble de niveau $\Psi^{-1}(\mu)$. Si ξ appartient à l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_μ de G_μ , $\xi_P(x) \in \ker(T_x \Psi)$.

Les résultats suivants sont établis dans Marsden-Weinstein ⁽¹⁰⁾.

1.1. LEMME. — Si $x \in \Psi^{-1}(\mu)$ et si $G \cdot x$ est l'orbite de x :

(a) $T_x(G_\mu \cdot x) = T_x(G \cdot x) \cap \ker T_x \Psi$.

(b) $\ker T_x \Psi$ est le complément Ω -orthogonal de $T_x(G \cdot x)$.

1.2. THÉORÈME. — Si μ est une valeur régulière de Ψ et si G_μ agit librement et proprement sur $\Psi^{-1}(\mu)$, il existe une structure symplectique unique sur

$$P_\mu = \Psi^{-1}(\mu)/G_\mu$$

reliée à (P, Ω) par projection.

Ce résultat unifie ⁽¹⁰⁾ beaucoup de résultats connus de géométries symplectique et mécanique; P_μ est appelé l'espace de phase réduit ou l'espace des vrais degrés dynamiques de liberté.

2. UNE DÉCOMPOSITION POUR LES VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES. — Supposons maintenant que P et G soient munis de structures riemanniennes. L'orthogonalité et l'adjonction seront entendues par rapport aux produits intérieurs correspondants. On a la décomposition orthogonale :

(1) $T_x P = \ker T_x \Psi \oplus \text{range } T_x^* \Psi,$

où $T_x \Psi : T_x P \rightarrow \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ et $T_x^* \Psi : \mathfrak{g}^* \rightarrow T_x P$ est son adjoint. D'après 1.1 (b), on peut vérifier que

$$(2) \quad (\ker T_x \Psi)^\perp = \varphi_x^{-1}(\omega_x T_x(G \cdot x)),$$

où $^\perp$ est le complément orthogonal pour la métrique et $\varphi_x : T_x P \rightarrow T_x^* P$, $\omega_x : T_x P \rightarrow T_x^* P$ sont les isomorphismes associés respectivement à la métrique et à la structure symplectique.

Ainsi

2.1. LEMME. — *On a*

$$(3) \quad T_x P \approx \ker T_x \Psi \oplus T_x(G \cdot x),$$

où l'isomorphisme est naturel.

D'autre part, pour $x \in P$, $\alpha_x : \mathfrak{g}_\mu \rightarrow T_x P$; $\xi \rightarrow \xi_P(x)$ si bien que

$$(4) \quad T_x P = \text{range } \alpha_x \oplus \ker \alpha_x^*.$$

2.2. LEMME. — *Les décompositions (3) et (4) sont compatibles en ce sens que*

$$\text{range } \alpha_x \subset \ker T_x \Psi.$$

Cela résulte de 1.1 (a). On a ainsi :

2.3. THÉORÈME. — *Pour $x \in P$, on a la décomposition plus fine :*

$$(5) \quad T_x P = \text{range } \alpha_x \oplus (\ker T_x \Psi \cap \ker \alpha_x^*) \oplus \text{range } T_x^* \Psi \\ \simeq T_x(G_\mu \cdot x) \oplus (\ker T_x \Psi / T_x(G_\mu \cdot x)) \oplus T_x(G \cdot x).$$

Par suite $v \in T_x P$ peut être écrit de manière unique comme somme de trois vecteurs orthogonaux

$$v = v_1 + v_2 + v_3,$$

où $v_1 = \xi(x)$ pour quelque $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$, $T_x \Psi \cdot v_2 = 0$, $\alpha_x^* v_2 = 0$ et v_3 , orthogonal à v_1 , v_2 est dans $\text{rang } T_x^* \Psi$.

Notons que, dans les conditions de 1.2, v_2 peut être identifié naturellement à un élément tangent à P_μ ; v_2 est dans la direction d'une composante pour l'action de G_μ sur $\Psi^{-1}(\mu)$.

Dans le cas infini-dimensionnel, nous supposons seulement que la forme symplectique et la métrique sont faiblement non dégénérées [cf. Chernoff-Marsden (3)]. On doit aussi, comme dans Ebin (5), être attentif en ce qui concerne les hypothèses de régularité. Les points cruciaux sont les suivants :

(a) On doit avoir un sous-espace fermé $T_x^+ P \subset T_x^* P$ tel que φ_x et ω_x soient des isomorphismes sur $T_x^+ P$.

(b) On suppose que G est groupe topologique et variété et opère en $x \in P$ de façon que l'action de G sur l'orbite de x soit régulière; l'ensemble de tels x est supposé dense.

(c) On requiert que Ad_{g-1}^* ait un sens sur un sous-groupe dense de G de façon que G_μ soit définissable et soit une variété et un groupe topologique.

(d) On suppose que Ψ existe et est défini partout sur P et vérifie sa propriété de définition et l'équivariance sur les ensembles décrits ci-dessus.

(e) Les opérateurs $T_x \Psi$ et α_x , ou leurs adjoints, sont tels que l'alternative de Fredholm [voir Berger-Ebin (2)] s'applique à eux; (1) par exemple est assuré. Dans les exemples, ce pourrait être des opérateurs différentiels et on requiert que leurs symboles (ou les symboles de leurs adjoints) soient injectifs.

Si ces conditions techniques soit satisfaites, on obtient encore la décomposition (5).

3. EXEMPLES I (décomposition de Moncrief). — Sont M une variété compacte et \mathcal{M} l'espace des métriques riemanniennes sur M ; $T^+ \mathcal{M}$ est l'ensemble des (g, π) , où $g \in \mathcal{M}$ et π est une densité tensorielle contravariante symétrique $\pi^{ij} \sqrt{\det g_{kl}}$. \mathcal{D} est le groupe des difféomorphismes de M et il opère sur \mathcal{M} et $T^+ \mathcal{M}$. Pour son action, le moment est

$$\Psi(g, \pi) \cdot X = 2 \int X \delta \pi,$$

où δ est la divergence, et $\alpha_{(g, \pi)}(X) = (L_X g, L_X \pi)$. La décomposition (5) correspondante de $(h, \omega) \in T_{(g, \pi)}(T^+ \mathcal{M})$ est juste deux fois la décomposition canonique usuelle de Berger-Ebin; $h = h^0 + L_X g$, où $\delta h^0 = 0$.

Soit \mathcal{F} le groupe additif des fonctions positives sur M et $G = \mathcal{F} \cdot \mathcal{D}$ le produit semi-direct; G « opère » de manière symplectique sur $T^+ \mathcal{M}$ selon le groupe dynamique de la relativité [(6), (8)]. Pour $N \in T_1 \mathcal{F}$, $X \in T_g \mathcal{D}$ (champs de vecteurs sur \mathcal{M}) le moment peut s'écrire :

$$\Psi(g, \pi)(N, X) = 2 \int X \delta \pi + \int N \cdot \mathcal{H}(g, \pi),$$

où

$$\mathcal{H}(g, \pi) = \left(\frac{1}{2} (\text{tr } \pi)^2 - \pi \cdot \pi + R(g) \right) \mu_g,$$

$R(g)$ étant la courbure scalaire de g .

Les équations du mouvement en relativité générale (qui dépendent du choix de N, X) peuvent s'écrire (Fisher, 1972) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g \\ \pi \end{pmatrix} = J \circ D \Phi^*(g, \pi) \begin{pmatrix} N \\ X \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

où $\Phi(g, \pi) = (\mathcal{H}(g, \pi), \delta \pi)$. L'action de G sur $T^+ \mathcal{M}$ admet le générateur infinitésimal

$$\alpha_{(g, \pi)}(N, X) = J \circ D \Phi^*(g, \pi) \begin{pmatrix} N \\ X \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs concernés ont un symbole injectif (7); pour $\mu = 0$, $G_\mu = G$, (5) nous donne la décomposition de Moncrief : si $\delta \pi = 0$ et $\mathcal{H}(g, \pi) = 0$:

$$6) \quad \begin{cases} T_{(g, \pi)}(T^+ \otimes) = (\text{range } J \circ D \Phi(g, \pi)^*) \oplus, \\ (\ker D \Phi(g, \pi) \cap \ker(D \Phi(g, \pi) \circ J)) \oplus \text{range } D \Phi(g, \pi)^*. \end{cases}$$

Les opérateurs $D \Phi$ et $D \Phi^*$ sont explicitement calculés dans (7). Si $\pi = \lambda g$ et g est une métrique d'Einstein, cette décomposition se réduit à deux copies de la décomposition de Barbance-Deser-Berger-Ebin [Moncrief (11) et (1), (2), (4)]

$$h = h^{TT} + L_X g + (g \Delta f + \text{Hess } f - f \text{ Ric}(g)),$$

où $\delta h^{\text{TT}} = 0$, $\text{tr } h^{\text{TT}} = 0$ (TT = transverse sans trace). On note que la position dans $\ker D \Phi(g, \pi) \cap \ker (D \Phi(g, \pi) \circ J)$ est dans la direction de l'espace des vrais degrés gravitationnels de liberté $\mathcal{E} = \mathcal{E}_g \cap \mathcal{E}_\pi / \mathcal{I} \mathcal{D}$, où

$$\mathcal{E}_g \cap \mathcal{E}_\pi = \Psi^{-1}(0) = \{(g, \pi) \mid \delta \pi = 0 \text{ et } \mathcal{H}(g, \pi) = 0\}.$$

EXEMPLE II [décomposition de York (¹³)]. — Soit $T^+ \mathcal{M}$ comme ci-dessus et $G = P$. \mathcal{D} le groupe conforme opérant sur \mathcal{M} et ainsi sur $T^+ \mathcal{M}$ par image par $\eta \in \mathcal{D}$ et produit par $\varphi \in P$ (fonction positive). On a

$$\Psi_{(\theta, \pi)}(p, x) = 2 \int X \delta \pi + \int p \text{tr } \pi; \quad \alpha_{(\theta, \pi)}(p, x) = (pg + L_X g, -p^{-1} \pi + L_X \pi)$$

et les adjoints de ces opérateurs sont aisément calculables. La décomposition (5) devient deux copies de la décomposition de York :

$$h = h^{\text{TT}} + (fg + L_X g),$$

où $\delta h^{\text{TT}} = 0$, $\text{tr } h^{\text{TT}} = 0$ et $nf = \text{tr } h + 2 \delta X$. L'espace de phase réduit est alors $\mathcal{E}_g \cap \mathcal{E}_\pi / P$. \mathcal{D} qui est localement isomorphe au \mathcal{E} de l'exemple I [on utilise les idées de (¹²)]. La seconde partie de la décomposition (5) décrit l'espace tangent à ce quotient. Des discussions plus détaillées sont données dans (⁹). Le cas de M non compacte est beaucoup plus technique et requiert l'emploi des espaces de Sobolev à poids $M_{\varphi, \delta}^p$ de Nirenberg-Walker-Cantor [cf. (⁹)].

4. Remarquons que si nous prenons $P = T^+ \Lambda_k$ (où Λ_k sont les k -formes sur une variété M) et $T^+ \Lambda_k \subset T^* \Lambda_k$ est l'ensemble des paires (α, β) , $\alpha \in \Lambda_k$, $\beta \in \Lambda_{n-k}$, \mathcal{D} agissant sur Λ_k donc sur P de la manière usuelle, on a une décomposition générale (5). Si la décomposition est prise en $(d\theta, 0)$ et $(0, \delta\rho)$, on obtient comme cas particulier le théorème de Hodge.

(*) Séance du 21 juillet 1975.

(¹) C. BARBANCE, *Comptes rendus*, 258, 1964, p. 5336 et 264, série A, 1967, p. 515.

(²) M. BERGER et D. EBIN, *J. Diff. Geom.*, 3, 1969, p. 379-392.

(³) P. CHERNOFF et J. MARSDEN, *Basic Properties of Infinite Dimensional Hamiltonian Systems (Lecture Notes*, 425, Springer, 1974).

(⁴) S. DESER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, A 7, 1967, p. 149-188 et 8, 1968, p. 269-273.

(⁵) D. EBIN, *Proc. Symp. Pure Math.*, 15, 1970, p. 11-40.

(⁶) A. FISCHER et J. MARSDEN, *Symp. Mathematica*, XIV, 1974, p. 193-205.

(⁷) A. FISCHER et J. MARSDEN, *Proc. Symp. Pure Math. A. M. S.*, 27, 1975, p. 219-263; *Bull. Am. Math. Soc.*, 79, 1973, p. 997-1003.

(⁸) A. FISCHER et J. MARSDEN, *The Space of True Gravitational Degrees of Freedom* (à paraître) et K. KUČAŘ, *Geometry of Hyperspace* (preprint).

(⁹) A. FISCHER et J. MARSDEN, *Duke Math. J.* (à paraître).

(¹⁰) J. MARSDEN et A. WEINSTEIN, *Rep. on Math. Phys.*, 5, 1974, p. 121-130.

(¹¹) V. MONCRIEF, *Decompositions of Gravitational Perturbations*, *J. Math. Phys.*, 16, 1975, p. 1556-1560.

(¹²) N. O'MUCHADHA et J. W. YORK, *Phys. Rev.*, 10, 1974, p. 428-446.

(¹³) J. W. YORK, *Ann. Inst. H. Poincaré* (à paraître).

Department of Mathematics,
University of California,
Berkeley, California;

Department of Mathematics,
University of California,
Santa Cruz, California;

Département de Mécanique,
Université Paris VI.