

ANALYSE SUR LES VARIÉTÉS. — *Sur le noyau des opérateurs pseudo-différentiels à symbole surjectif et non injectif.* Note (*) de MM. Jean-Pierre Bourguignon, David G. Ebin et Jerrold E. Marsden, présentée par M. Laurent Schwartz.

On établit qu'un opérateur pseudo-différentiel à symbole surjectif et non injectif a un noyau de dimension infinie. Deux applications à la relativité générale et à la géométrie riemannienne sont présentées.

1. NOTATIONS. — X désigne une variété C^∞ compacte de dimension n . Son fibré tangent est désigné par TM et son fibré cotangent par T^*M . Des fibrés vectoriels C^∞ sur X sont désignés par E, F ou G ; $C^\infty(E)$ est l'espace des sections C^∞ de E et pour s entier $H^s(E)$ le complété de $C^\infty(E)$ pour une norme H^s qui est notée $\| \cdot \|_s$ (des métriques et des connexions sur X et les fibrés sont supposés choisis; les métriques sont notées avec une seule barre). Si Ω est un ouvert régulier de X , $C_0^\infty(\bar{\Omega}, E)$ désigne l'espace des sections C^∞ de E à support dans $\bar{\Omega}$ et $H_0^s(\bar{\Omega}, E)$ son complété pour une norme H^s .

Si P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre entier m de $C^\infty(E)$ dans $C^\infty(F)$, $\sigma(P)$ désigne son symbole principal. Nous réservons la notation P lorsque P opère de $C^\infty(E)$ dans $C^\infty(F)$; P_s désigne l'extension de P de $H^s(E)$ dans $H^{s-m}(F)$, $P^{\bar{\Omega}}$ la restriction de P à $C_0^\infty(\bar{\Omega}, E)$, $P_s^{\bar{\Omega}}$ l'extension de $P^{\bar{\Omega}}$ à $H_0^s(\bar{\Omega}, E)$.

2. THÉORÈME 1. — *Si P est à symbole surjectif et non injectif, alors le noyau de P est de dimension infinie.*

Preuve. — Supposons $\text{Ker } P$ de dimension finie. Montrons que pour tout $s \geq 0$, $\text{Ker } P_s = \text{Ker } P$.

D'après (1), p. 383 ou (2), théorème 7.2, P étant à symbole surjectif et par suite P^* à symbole injectif, $\text{Im } P^*$ est facteur direct dans $C^\infty(E)$ et par suite

$$C^\infty(E) = \text{Im } P^* \oplus \text{Ker } P;$$

de plus

$$H^s(E) = \text{Im } P_{s+m}^* \oplus \text{Ker } P_s \quad \text{pour tout } s,$$

les facteurs étant orthogonaux pour le produit scalaire H^0 .

Si $\text{Ker } P_0$ était différent de $\text{Ker } P$, alors $\text{Im } P^*$ ne serait pas dense dans $\text{Im } P_m^*$, ce qui n'est pas.

Par suite comme $\text{Ker } P \subset \text{Ker } P_s \subset \text{Ker } P_0$ pour tout $s \geq 0$,

$$\text{Ker } P_s = \text{Ker } P \quad \text{pour tout } s \geq 0.$$

Soit A un supplémentaire topologique de $\text{Ker } P$ dans $H^0(E)$. Notons $A^m = A \cap H^m(E)$. Nous avons

$$(1) \quad H^m(E) = \text{Ker } P \oplus A^m.$$

L'application $P_m : A^m \rightarrow P_m(H^m(E)) \subset H^0(E)$ est un isomorphisme, car P_m est continu et bijectif et $P_m(H^m(E))$ fermé dans $H^0(E)$.

Donc si $t \in C^\infty(E)$, alors d'après (1) on peut écrire :

$$t = t' + t'' \quad \text{avec } t' \in \text{Ker } P, \quad t'' \in A^m;$$

de plus il existe une constante c telle que

$$\|t\|_m \leq (\|t'\|_m + \|t''\|_m) \leq c(\|t'\|_m + \|P_m t\|_0).$$

Si $\text{Ker } P$ est de dimension finie, il existe une constante c telle que pour $t' \in \text{Ker } P$,

$$\|t'\|_m \leq c\|t'\|_0.$$

Par suite il existe une constante c telle que

$$(2) \quad \|t\|_m \leq c(\|t\|_0 + \|P_m t\|_0).$$

La preuve s'inspire alors directement des calculs présentés dans (5), p. 133.

Soit Ω un domaine de carte et $t \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$. Si pour $\xi_0 \neq 0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $t_\lambda = e^{i\lambda \langle x, \xi_0 \rangle} \cdot t$; alors par définition du symbole principal de P :

$$(3) \quad \lambda^{-m} e^{-i\lambda \langle x, \xi_0 \rangle} \cdot P t_\lambda \rightarrow \sigma(P)(x, \xi_0) t \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow \infty.$$

Évaluons $\|t_\lambda\|_m$. Pour λ assez grand,

$$\|t_\lambda\|_m = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{t}(\eta - \lambda \xi_0)|^2 (1 + |\eta|^2)^m d\eta \right)^{1/2} \geq \lambda^m \|t\|_0.$$

En utilisant (2) et (3), pour λ assez grand, il existe des constantes c telles que

$$\|t\|_0 \leq c \lambda^{-m} \|t_\lambda\|_m \leq c \|\sigma(P)(\cdot, \xi_0) t\|_0.$$

Comme t est arbitraire dans $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$, pour tout x dans Ω , pour tout ξ_0 dans $(\mathbb{R}^n)^*$, il existe une constante c telle que

$$|t(x)| \leq c |\sigma(P)(x, \xi_0)(t(x))|.$$

Le symbole $\sigma(P)$ devrait donc être injectif, d'où une contradiction. ■

Remarque. — Dans le cas où P est un opérateur différentiel et où Ω est un ouvert régulier non vide de X , on prouve de façon tout à fait analogue que $\text{Ker } P_m^*$ est de dimension infinie en se servant de la deuxième partie de la preuve, car toujours d'après (7), théorème 7.2, $\text{Im } P_m^*$ est fermée dans $H^0(\overline{\Omega}, E)$.

THÉORÈME 2. — Soit $L : E \rightarrow G$ un morphisme de fibrés vectoriels C^∞ . Si le symbole de P en restriction à $\text{Ker } L$ est surjectif mais non injectif, alors l'espace des sections de $\text{Ker } L$ annihilées par P est de dimension infinie.

Preuve. — Lorsqu'on choisit un domaine de carte Ω , pour x dans Ω , $\dim \text{Ker } L_x$ atteint sa valeur minimale sur un ouvert Ω' . On applique les estimées du théorème 1 sur cet ouvert en restriction auquel $\text{Ker } L$ est un fibré.

3. APPLICATION A LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE. — Soit g une métrique riemannienne. δ_y désigne l'adjoint de la dérivée de Lie de la métrique; δ_y est aussi la divergence des 2-tenseurs symétriques calculée au moyen de la dérivation covariante D de Levi-Civita. La trace par rapport à g des 2-tenseurs symétriques est désignée par Tr_g .

PROPOSITION 3. — Si $\dim X \geq 3$, l'espace des champs C^∞ de 2-tenseurs symétriques à trace nulle et à divergence nulle (resp. de classe H^1 à support dans une boule non vide) est de dimension infinie.

Preuve. — On applique la version locale du théorème 2 à $P = \delta_g$, en prenant $E = TZ$, le fibré des 2-tenseurs symétriques à trace nulle et pour F le fibré tangent. Comme $\dim F < \dim E$ dès que $\dim X \geq 3$, le symbole de P n'est pas injectif.

Pour $h \in \mathcal{O}^2 T^* X$, $\sigma(P)(\xi)h = -h^2 \cdot \xi$ (h^2 désigne le 2-tenseur contravariant associé à h par g et \cdot la contraction) qui est clairement surjectif dès que $\dim X \geq 2$. ■

COROLLAIRE 4. — L'espace tangent à l'espace des structures conformes en dimension ≥ 3 et en particulier en dimension 3 l'espace des « vrais degrés gravitationnels de liberté » sont de dimension infinie.

Preuve. — En effet tout $h \in C^\infty(\mathcal{O}^2 T^* X)$ se décompose en $h = h^{TT} + h^*$ avec $\text{Tr}_g h^{TT} = 0$, $\delta_g h^{TT} = 0$ et h^* tangent à l'orbite de g sous l'action du groupe conforme $\mathcal{D}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$, produit semi-direct du groupe des difféomorphismes par le groupe multiplicatif des fonctions positives sur X . ■

Remarque. — En dimension 2, l'espace des structures conformes s'identifie avec l'espace des structures complexes et alors il est de dimension $6\gamma - 6$ où γ désigne le genre de X .

4. APPLICATION A LA GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE. — Il est classique [cf. (6), 3.4] que si $\tau(g)$ désigne la courbure scalaire de g , alors pour $h \in C^\infty(\mathcal{O}^2 T^* X)$:

$$\frac{d}{d\lambda}(g + \lambda h)|_{\lambda=0} = \tau'_g(h) = \Delta_g \text{Tr}_g h + \delta_g \delta_g h - (\text{Ric}(g), h),$$

où Δ_g désigne le laplacien sur les fonctions et $(\text{Ric}(g), \cdot)$ le produit scalaire avec la courbure de Ricci de g .

COROLLAIRE 5. — Il existe un espace de dimension infinie de déformations infinitésimales de g préservant la courbure scalaire dans X (resp. de classe H^1 à support dans une boule non vide) dès que $\dim X \geq 3$.

Preuve. — On applique le théorème 2 à $E = TZ$, $F = TX$, G le fibré trivial $\mathbb{R} \times X$ et $L = (\text{Ric}(g), \cdot)$. ■

Dans (3), J. Marsden et A. Fischer s'intéressent au problème de la stabilité à la linéarisation, à savoir de l'existence d'une courbe de métriques $g(\lambda)$ issue de g telle que

$$\tau(g(\lambda)) = \tau(g) = \tau_0$$

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda)|_{\lambda=0} = h \text{ donné.}$$

Il est clair que nécessairement $\tau'_g(h) = 0$.

En tant qu'application des métriques sur X dans les fonctions sur X , τ est une submersion sauf aux points où $\tau'_g : \mathcal{F}(X) \rightarrow C^\infty(\mathcal{O}^2 T^* X)$ n'est pas injectif [cf. (2)]. Dans le cas général, il y a stabilité [cf. (3)].

error. Why is symbol p sur. Eq Ric(g) = (100 000 000)

gives count. in. But O.K. it g Einstein.

et que

PROPOSITION 6 [cf. (3) pour des cas particuliers]. - Si $\dim X \geq 3$, il n'y a pas stabilité à la linéarisation aux métriques g où τ n'est pas une submersion.

Preuve. - Dans (3), A. Fischer et J. Marsden montrent que la condition

$$(4) \quad \text{« pour tout } f \text{ dans Ker } \tau'_g, \int_X f \tau''(h, h) = 0 \text{ »}$$

(où τ'' désigne la dérivée seconde de la courbure scalaire) est une condition nécessaire pour que h dans $\text{Ker } \tau'_g$ soit une direction stable.

Si τ n'est pas une submersion, il existe $f \in C^\infty$ non nulle telle que $\tau'_g(f) = 0$. Soit Ω un ouvert de X où f est par exemple positive. Soit S le sous-espace fermé de $H^1(E)$ de tous les h à support dans $\bar{\Omega}$ et vérifiant $\text{Tr}_g h = 0$, $\delta_g h = 0$ et $(\text{Ric}(g), h) = 0$.

Supposons qu'il y ait stabilité en g ; (4) doit être satisfaite pour tout h dans S ; d'après la formule donnant τ'' [cf. (4)]:

$$\frac{1}{2} \int_X f |Dh|^2 = \int_X f R(h, h),$$

où R est le tenseur de courbure quatre fois contravariant.

La fonction f étant positive sur Ω , on en déduit qu'il existe une constante c telle que pour tout h dans S :

$$\|h\|_1 \leq c \|h\|_0.$$

S étant de dimension infinie d'après le corollaire 5 et la fin de la remarque, il y a une contradiction. ■

(*) Séance du 1^{er} mars 1976.

(1) M. BERGER et D. G. EBIN, *J. Diff. Geom.*, 3, n° 3, 1969, p. 379-392.

(2) J. P. BOURGUIGNON, *Comp. Math.*, 30, fasc. 1, 1975, p. 1-41.

(3) A. FISCHER et J. MARSDEN, *Linearization Stability of Non-Linear Partial Differential Equations (Proc. Symp. Pure Math., Stanford, XXVII, 1974, p. 219-263)*.

(4) A. FISCHER et J. MARSDEN, *Deformations of the Scalar Curvature (Duke Math. J. (à paraître))*.

(5) L. HÖRMANDER, *Ann. of Math.*, 83, 1966, p. 129-209.

(6) A. LICHNEROWICZ, *Inst. Hautes Études Sc. Publ. Math.*, n° 10, 1961, p. 293-344.

(7) L. SCHWARTZ, *Equaciones diferenciales parciales elípticas*, Cours à Bogota.

J.-P. B. :

Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
plateau de Palaiseau,
91120 Palaiseau;

D. G. E. :

Department of Mathematics
S.U.N.Y.,
Stony Brook, N.Y. 11794,
U.S.A.;

J. E. M. :

Department of Mathematics,
University of California,
Berkeley, Ca 94720,
U.S.A.