C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (15 mars 1976) Série A — 609

RELATIVITÉ GÉNÉRALE. — *Sur la positivité de la masse*. Note (*) de Mme Yvonne Choquet-Bruhat et M. Jerrold E. Marsden, présentée par M. André Lichnerowicz.

Nous démontrons qu'il existe un voisinage (au sens d'espaces fonctionnels convenables) de l'espace-temps de Minkowski tel que tout espace-temps de ce voisinage, solution des équations d'Einstein du vide, a une masse positive. Nous indiquons quelques résultats et difficultés pour la résolution du problème global.

INTRODUCTION. — Le problème de la positivité de la masse m associée à un espace temps asymptotiquement euclidien, solution des équations d'Einstein du vide, a fait l'objet de nombreux travaux et discussions. Une méthode élégante pour établir cette positivité a été proposée par Brill et Deser ([1]), s'inspirant de la théorie de Morse: ils montrent que la masse (en tant que fonction de l'espace temps) a pour seul point critique l'espace temps plat; en ce point m est nul et sa seconde variation « significative » (en un sens physique) est positive. Nous nous proposons ici de démontrer rigoureusement, par une méthode directe, que l'espace temps plat est un minimum local de la masse.

NOTATIONS ET ESPACES FONCTIONNELS. — On désigne par $M^p_{s,\delta}$, $1 < p < \infty$, $\delta \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{Z}^+$ la complétion d'un espace de fonctions C^∞ à support compact $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ pour la norme

$$\|f\|_{M^p_{s,\delta}} = \sum_{0 \leq \alpha \leq s} \|\sigma^{\delta+\alpha} D^\alpha f\|_{L^p},$$

où $\sigma(x) = (1+|x|^2)^{1/2}$, D^α dérivée (totale) d'ordre α.

On aura $n = 3$ et on prendra $3 < p < 6$, $\delta = 0$, $s \geqq 3$. On a alors $M^p_{s,\delta} \subset C^r$, la multiplication $M^p_{s,\delta} \times M^p_{s-l,\delta+l} \to M^p_{s-l,\delta+l}$, $0 \leqq l \leqq s$ est bilinéaire et continue et le laplacien Δ est un isomorphisme de $M^\delta_{s,\delta}$ sur $M^p_{s-2,\delta+2}$ [*cf.* Nirenberg-Walker ([2]) et Cantor ([3])]. On montre aussi que $f \in M^p_{s,\delta}$ implique $f \in L^6$, $D f \in L^2$ et

$$\|f\|_{L^6} \leqq \mathrm{Cte}\,\|f\|_E \leqq \mathrm{Cte}\,\|f\|_{M^p_{s,\delta}}, \tag{1}$$

où $\|f\|_E = \|Df\|_{L^2}$ est la « norme de l'énergie ».

On désigne par γ la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^3$, par $S^p_{s,\delta}$ l'espace des champs de 2-tenseurs covariants symétriques sur $\mathbf{R}^3$ de composantes dans $M^p_{s,\delta}$. On note $\mathcal{M}^p_{s,\delta}$ le cône ouvert des métriques g proprement riemanniennes sur $\mathbf{R}^3$ telles que $g-\gamma \in S^p_{s,\delta}$. L'espace tangent en g à $\mathcal{M}^p_{s,\delta}$ est $S^p_{s,\delta}$.

LA FONCTION MASSE ET SA DÉRIVÉE. — Un espace temps asymptotiquement euclidien est déterminé par ses données de Cauchy sur $\mathbf{R}^3$, métrique $g \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}$ et deuxième forme fondamentale $k \in S^p_{s-1,\delta+1}$.

La fonction masse m est la restriction aux solutions des contraintes de la fonction $\overline{m}$: $\mathcal{M}^p_{s,\delta} \times S^p_{s-1,\delta+1} \to \mathbf{R}$ définie par

$$16\pi\overline{m}(g, k) = \int_{\mathbf{R}^3} (\partial_i \partial_j g_{ij} - \partial_i \partial_i g_{jj})\, d^3 x - \int_{\mathbf{R}^3} (\mathrm{R}(g) - k.k + (\mathrm{tr}\, k)^2)\, d\mu(g) \tag{2}$$

[$\mathrm{R}(g)$ courbure scalaire, $d\mu(g)$ élément de volume, $\mathrm{tr}\, k = \mathrm{tr}_g\, k$].

Pour notre choix de p, s, δ la fonction $\overline{m}$ est C^∞. Sa dérivée se calcule en utilisant les formules de variation de $R(g)$ et $\mathrm{Ricc}(g)$ (tenseur de Ricci) données par Lichnerowicz [4]. On trouve pour la dérivée de $\overline{m}$ dans la direction $(h, w) \in S^p_{s,\delta} \times S^p_{s-1,\delta+1}$ au point (g, k) :

$$(3) \qquad 16\pi\overline{m}'(g, k).(h, w) = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \mathrm{Ricc}(g) - \frac{g}{2}(R(g) - k.k + (\mathrm{tr}\, k)^2 \right\} h\, d\mu(g) + 2\int_{\mathbb{R}^3} (k - g\,\mathrm{tr}\, k).w\, d\mu(g).$$

(g, k) est un point critique de $\overline{m}$ si et seulement si $k - g\,\mathrm{tr}\, k = 0$ (c'est-à-dire $k = 0$) et $\mathrm{Ricc}(g) - (g/2)\,R(g) = 0$ (c'est-à-dire g est plat).

Nous restreindrons désormais notre étude au cas dit « à symétrie temporelle », $k = 0$. D'après un théorème de N. O'Murchadha-J. York [5] qu'on peut démontrer dans les espaces $M^p_{s,\delta}$ en utilisant la méthode conforme de A. Lichnerowicz, à tout espace temps admettant une section d'espace maximale [6] ($\mathrm{tr}\, k = 0$) on peut en associer un autre de masse inférieure ou égale avec $k = 0$.

Le sous-espace de $\mathcal{M}^p_{s,\delta}$ vérifiant les contraintes est alors au voisinage de γ une sous-variété $\mathscr{C}$ [[7], [8]], de plan tangent $T_g\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C} : \quad \{ g \in \mathcal{M}^p_{s,\delta},\ R(g) = 0 \}, \qquad T_g\mathscr{C} : \quad \{ h \in S^p_{s,\delta},\ \Delta_g \mathrm{tr}\, h - \delta\delta h + \mathrm{Ricc}(g).h = 0 \},$$

c'est-à-dire :

$$T_g\mathscr{C} : \quad \left\{ h = k - \frac{1}{2} g\,\mathrm{tr}\, k + \frac{1}{2} g\,\Delta_g^{-1}(\delta\delta k - \mathrm{Ricc}(g).k);\ k \in S^p_{s,\delta} \right\}.$$

D'où pour $g \in \mathscr{C}$, $h \in T_g\mathscr{C}$, $k \in S^p_{s,\delta}$:

$$(4) \qquad 16\pi m'(g).h = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{Ricc}(g).h\, d\mu(g) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{Ricc}(g).k\, d\mu(g).$$

On montre que si $g \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}$, $\mathrm{Ricc}(g) = 0$ alors $g \in O_\gamma$ orbite de l'espace euclidien par les difféomorphismes $\eta \in \mathscr{D}^p_{s+1,\delta-1}$ [tels que $D(\eta - I)$ et $D(\eta^{-1} - I) \in M^p_{s,\delta}$]. D'où

THÉORÈME. — *$g \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}$ est un point critique de m si et seulement si g est isométrique à l'espace euclidien par un difféomorphisme de $\mathscr{D}^p_{s+1,\delta-1}$.*

DÉRIVÉE SECONDE DE $\overline{m}$. — On trouve par le calcul, sans autres hypothèses, que la dérivée seconde de $\overline{m} : \mathcal{M}^p_{s,\delta} \to \mathbb{R}$ est la forme quadratique :

$$(5) \quad 16\pi\overline{m}''(g)(h, h) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \nabla h.\nabla h\, d\mu(g) + \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ -\frac{1}{2}(d\,\mathrm{tr}\, h)^2 - (\delta h)^2 + d\,\mathrm{tr}\, h.\delta h - (\mathrm{tr}\, h)(\mathrm{Ricc}(g).h) + 3\,\mathrm{Ricc}(g).h \times h \right\} d\mu(g) + \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{4} R(g)(\mathrm{tr}\, h)^2 - R(g)(h.h) \right\} d\mu(g),$$

où . est la contraction des tenseurs et $(h \times h)_{ij} = h_{il} h^l_j$.

Si $\mathrm{Ricc}(g) = 0$, $\mathrm{tr}\, h = 0$ et $\delta h = 0$, (5) se réduit au produit scalaire

$$\langle h, h \rangle_g = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla h.\nabla h\, d\mu(g).$$

On notera $\| \quad \|_E$ la norme de l'énergie

$$\| h \|_E^2 = \langle h, h \rangle_\gamma = \int_{\mathbb{R}^3} | \partial_i h_{ij} |^2 d^3 x.$$

Construction d'une tranche dans $\mathscr{M}^p_{s,\delta}$. — Posons

$$S = \{ g \in \mathscr{M}^p_{s,\delta},\ g^{ij} \Gamma^k_{ij} = 0 \},$$

métriques en coordonnées harmoniques, $S \ni \gamma$. On démontre que S est dans un voisinage de γ une sous-variété C^∞ de $\mathscr{M}^p_{s,\delta}$ modelée sur

$$E_1 = \left\{ h_1 \in S^p_{s,\delta},\ \delta_\gamma h_1 - \frac{1}{2} d\, \mathrm{tr}_\gamma h_1 = 0 \right\}$$

en prouvant que $S^p_{s,\delta}$ est la somme topologique et $\langle\, ,\rangle_\gamma$ orthogonale de E_1 et

$$E_2 = \left\{ (h_2)_{ij} = -\frac{1}{2} \Delta_\gamma^{-1} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\Delta_\gamma^{-1} \partial_l u_l),\ u_j \in M^p_{s,\delta} \right\}.$$

Si ε est assez petit et $\| g - \gamma \|_{S^p_{s,\delta}} < \varepsilon$ il existe un difféomorphisme φ, $D\varphi \in M^p_{s,\delta}$, tel que $\varphi^* g \in S$. Il suffit donc de montrer $\overline{m} > 0$ dans $\mathscr{C} \cap S$; au voisinage de γ.

Positivité locale de m sur S. — On démontre que :

Lemme. — *$\mathscr{C} \cap S$ est, au voisinage de γ, une sous-variété C^∞ de $\mathscr{M}^p_{s,\delta}$ de plan tangent au point g :*

$$B_1(g) = \left\{ h_1 \in S^p_{s,\delta};\ A_g(h_1) \equiv -\Delta_g \mathrm{tr}_g h_1 + \delta_g \delta_g h_1 - \mathrm{Ricc}(g).h_1 = 0, \right.$$
$$\left. a_g(h_1) \equiv \delta_g h_1 - \frac{1}{2} d\, \mathrm{tr}_g h_1 - h_1 . \Gamma(g) = 0 \right\}$$

et de normale, dans le produit scalaire $\langle\, ,\rangle_g$:

$$B_2(g) = \left\{ h_2 = -g\, U + \Delta_g^{-1} (\mathrm{Hess}_g U - \mathrm{Ricc}(g)\, U - \frac{1}{2} (\mathscr{L}_u g - g\, \delta_g u) - \Gamma(g).u \right\},$$

avec $U \in M^p_{s,\delta}$ et $u \in \chi^p_{s-1,\delta+1}$.

Soit alors $c : t \mapsto g(t)$ une courbe C^2, $g(0) = \gamma$, dans $\mathscr{C} \cap S$. On pose

$$g'(t) = h \in B_1(g) \qquad \text{et} \qquad g''(t) = k.$$

On prendra pour c une géodésique de la structure riemannienne faible ([9]) induite sur $\mathscr{C} \cap S$ par $\langle\, ,\rangle_g$ alors $k \in B_2(g)$.

On a

$$\frac{d^2 m}{dt^2}(g(t)) = \overline{m}''(g(t))(h, h) + \overline{m}'(g(t)).k,$$

avec, puisque $h \in B_1(g)$:

$$\overline{m}''(g(t))(h, h) = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} \nabla h . \nabla h - \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, h\, \mathrm{Ricc}(g).h \right.$$
$$\left. + 3\, \mathrm{Ricc}(g).(h \times h) + \frac{1}{2} d\, \mathrm{tr}\, h.(h.\Gamma) - (h.\Gamma)(h.\Gamma) \right\} d\mu(g).$$

On démontre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left| \overline{m}''(g)(h, h) - \frac{1}{2}\| h \|_E^2 \right| \leqq c \| g - \gamma \|_{M^p_{s,\delta}} \| h \|_E^2$$

en utilisant, entre autres, le lemme, conséquence des inégalités de Holder :

Lemme. — *Si* $g \in \mathcal{M}^p_{s,\delta}$ *et* $\rho = \mathrm{Ricc}(g)$ *alors* $\| \rho \|_{L^{3/2}} \leqq c \| g - \gamma \|_{M^p_{s,\delta}}$.

On majore de façon analogue $m'(g(t)).k$, en utilisant l'équation du second ordre vérifiée par une géodésique de $\langle\, ,\, \rangle_g$ sur $\mathscr{C} \cap S$.

Pour montrer que m est positif en un point $g \in \mathscr{C} \cap S$, $\| g - \gamma \|_{S^p_{s,\delta}} < \varepsilon$, on joint g à γ par un arc géodésique (c'est possible si ε est assez petit) $c : t \mapsto g(t)$, $g(0) = \gamma$, $g(1) = g$. Alors $m(g) = (d^2 m/dt^2)\, g(\tau))$, $0 < \tau < 1$, d'où

$$m(g) \geqq c \| h \|_E \geqq c' \| g - \gamma \|_E.$$

Remarques sur la positivité globale. — Il est facile de trouver un champ de vecteurs tangent à $\mathscr{C}$, pseudo gradient pour m, par exemple

$$Y_{ij}(g) = \Delta_g^{-1} R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_g^{-1} (R_{hk} \Delta_g^{-1} R^{hk} - \nabla_h \nabla_k \Delta_g^{-1} R^{hk}),$$

$Y(g) \in T_g \mathscr{C}$ et vérifie :

$$m'(g).Y(g) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \mathrm{Ricc}(g).\nabla \mathrm{Ricc}(g)\, d\mu(g) > 0 \qquad \text{si} \quad \mathrm{Ricc}(g) \not\equiv 0.$$

On peut montrer, en utilisant l'expression du tenseur de Ricci en coordonnées harmoniques, que si $g \in S$, $\| g - \gamma \| > \varepsilon$ implique $\| Y(g) \|_{S^p_{s,\delta}} > \eta$.

Il reste cependant plusieurs difficultés à résoudre pour pouvoir appliquer les résultats de la théorie de Morse généralisée aux variétés de dimension infinie, l'une d'entre-elles étant que la minoration de $\| Y(g) \|_{S^p_{s,\delta}}$ n'entraîne pas la minoration de $\| Y(g) \|_E$.

(*) Séance du 26 janvier 1976.

(1) D. Brill et S. Deser, *Ann. Phys.*, 50, 1968, p. 548-570.
(2) L. Nirenberg, *Ann. de Scuola. Norm. Sup. Pisa*, 13, 1959, p. 115-162.
(3) M. Cantor, *Indiana University Math. J.*, 24, 1975, p. 897-902.
(4) A. Lichnerowicz, *Publ. I.H.E.S.*, 10, 1961, p. 56.
(5) N. O'Murchadha et J. W. York, *Phys. Rev.*, D, 10, 1974, p. 2345-2357.
(6) Y. Choquet-Bruhat, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 169.
(7) Y. Choquet-Bruhat et S. Deser, *Ann. Phys.*, 81, 1973, p. 165-178.
(8) A. Fischer et J. Marsden, *Proc. Symp. Pure Math.*, 27, 1975, p. 219-263.
(9) E. Ebin et J. Marsden, *Ann. Math.*, 92, 1970, p. 102-163.

Y. C.-B. :
Département de Mécanique,
Université Paris VI,
4, place Jussieu,
75005 Paris;

J. E. M. :
Department of Mathematics,
University of California,
Berkeley,
U.S.A.